Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 2(13). C. 79-89. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-13-2-79-89

УДК 517.17

КАК НАУЧИТЬ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ?

О. К. Жданова

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
E-mail: kafmat@mail.ru

В настоящей статье приводятся материалы семинара, проведенного в КамГУ им. Витуса Беринга для учителей математики и всех интересующихся данными задачами. Семинар был посвящен решению задач с параметрами, задач повышенного уровня сложности Единого государственного экзамена.

Ключевые слова: ЕГЭ, задачи с параметрами, графические способы решения

MSC 97I99

HOW TO LEARN TO SOLVE PROBLEMS WITH A PARAMETER?

O. K. Zhdanova

Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia
E-mail: kafmat@mail.ru

This article presents the materials of the seminar held for mathematics teachers and all those interested in similar problems in Vitus Bering Kamchatka State University. The seminar was devoted to solving problems with parameters and the high level problems of the Unified State Exam.

Key words: Unified State Exam, the problems with the parameters, graphical methods to solve

Статистика результатов Единого государственного экзамена нескольких прошлых лет показывает, что именно задачи с параметрами реже всего являются задачами, в которых выпускники пробуют свои силы.

В чем кроется причина непопулярности этих задач?

Не секрет, что задачи с параметрами хоть и используют в основном доступные любому ученику теоретические знания, но практически не решаются в школьном курсе, а тем более не выносятся на рассмотрение при подготовке к итоговой аттестации.

Еще одной причиной, на взгляд большинства экспертов Единого государственного экзамена, является то, что учителя сами не готовы решать такие задачи и, следовательно, учить этому учеников.

В связи с этим, была проведена серия методических семинаров для учителей математики на базе Камчатского государственного университета имени Витуса Беринга.

В статье предлагаются материалы второго семинара по теме «Решение задач с параметрами с помощью геометрической интерпретации «Переменная-параметр»».

При решении уравнений и неравенств с параметром удобно пользоваться геометрической интерпретацией корней уравнения. На прошлом семинаре была рассмотрена геометрическая интерпретация вида «переменная-значение». Для того чтобы нам было легче сравнить преимущества и недостатки рассматриваемых интерпретаций, будем решать те же задачи, которые были решены на прошлом семинаре.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию, при которой используется изображение данной в уравнении зависимости вида $f(x;a)=0$ на координатной плоскости xOa либо aOx.

При выборе вида координатной плоскости будем руководствоваться следующими соображениями: если из связывающего переменные x и a равенства $f(x;a)=0$ проще выразить a через x, то используем плоскость xOa, если x через a – то плоскость aOx.

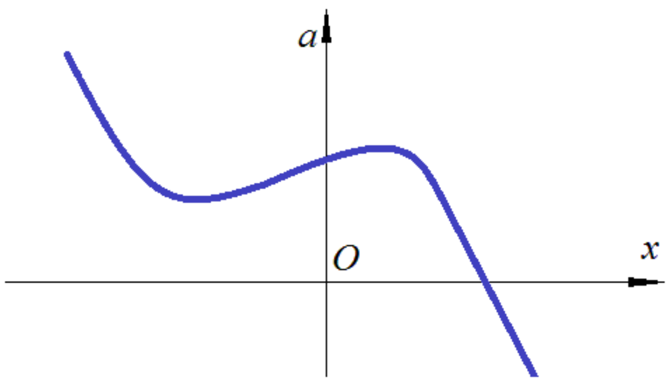
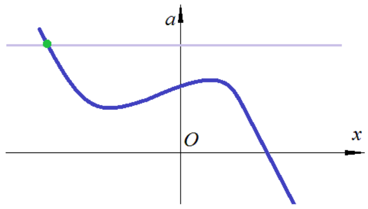
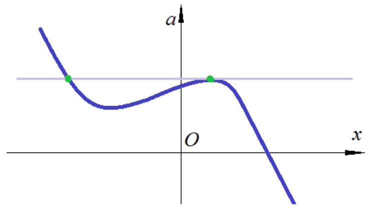


Рис. 1

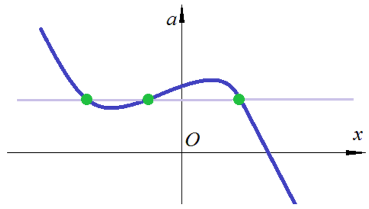
Далее берем различные значения a на оси ординат и проводим горизонтальные прямые с ординатой a (Рис.2,а,б,в). Если какая-то из этих прямых не пересекает графика, то корней нет, если пересекает, то корни уравнения – это абсциссы точек пересечения (Рис.2,г,д,е).



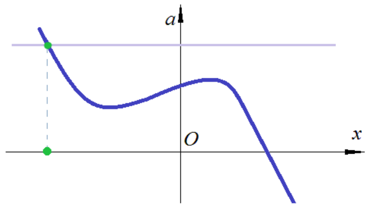
2,а



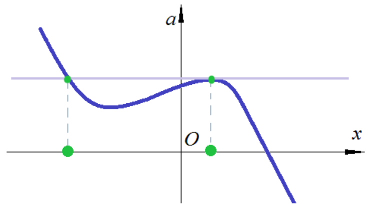
2,б



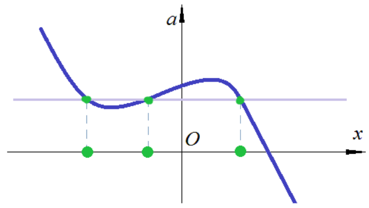
2,в



2,г



2,д



2,е

Рис.2

Для решения неравенств с параметрами с использованием координатной плоскости "переменная – параметр"можно поступать двумя способами.

Первый – изобразить множество $\{(x;a)|a(x)>0(a(x)<0)\}$, для этого обратиться к подграфикам и надграфикам функции $a(x)=0$.

Второй – изобразить множество $\{(x;a)|a(x)=0\}$, получатся некоторые линии на плоскости и этими линиями вся плоскость разобьется на несколько частей, внутри каждой из которых выполнено одно из неравенств $a(x)>0$ или $a(x)<0$. После этого выбираем те области, на которых выполнено нужное нам неравенство.

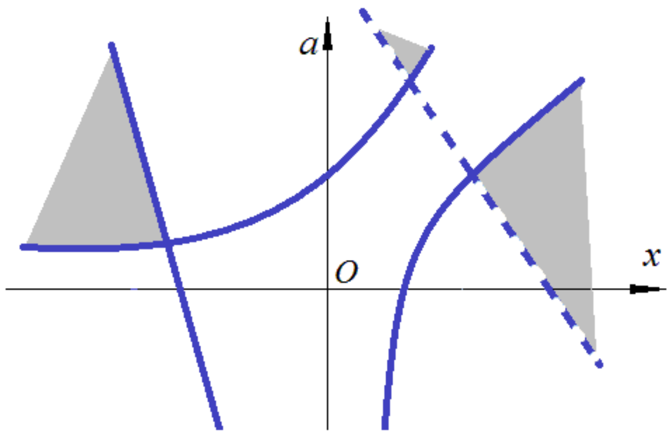
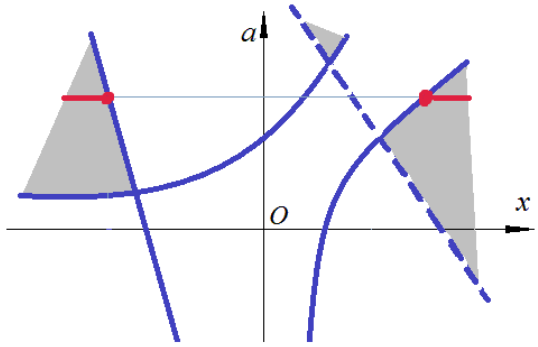


Рис.3

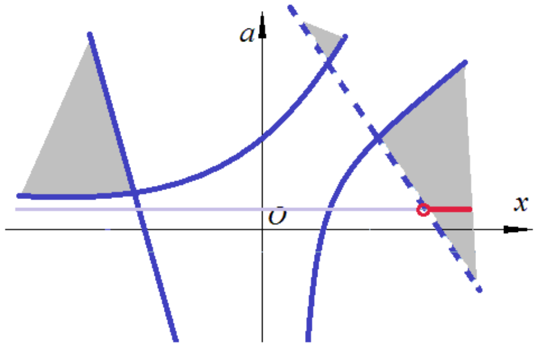
Чтобы узнать, где какое неравенство выполняется, достаточно взять какую-либо точку, в каждой из областей и посмотреть, какое неравенство выполнено в этой точке, при этом есть уверенность в том, что такое же неравенство выполнено во всех точках той области, откуда мы взяли конкретную точку.

Теперь будем брать на вертикальной оси a различные точки и проводить горизонтальные линии (рис. 4,а,б). Если такая линия пересекает выделенную область, то решения неравенства при выбранном значении a есть, если не пересекает – решений нет.

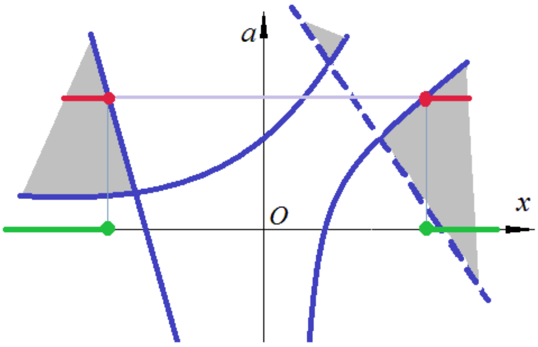
При этом само множество решений при фиксированном a представляет собой проекцию на ось абсцисс той части горизонтальной прямой, которая попала в выделенную область (рис 4.в,г).



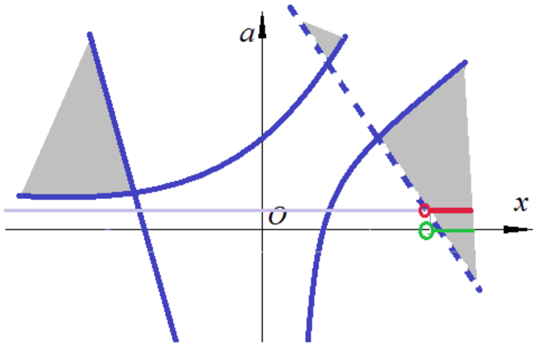
2,а



2,б



2,в



2,г

Рис. 4

Рассмотрим примеры решения задач.

1. При каких a корни уравнения $x^2+(a+1)x-3=0$ оба отрицательны.

Решение. Выразим a через x, так как a входит в уравнение в первой степени:
$a=a(x)=\dfrac{-x^2-x+3}{x}=-x-1+\dfrac{3}{x}$.

Исследуем поведение этой функции:

При стремлении x к большому отрицательному числу a будет неограниченно возрастать, т.е. при $x\to-\infty$ $a\to+\infty$;

При стремлении x к большому положительному числу a будет неограниченно убывать, т.е. при $x\to+\infty$ $a\to-\infty$;

При стремлении x к 0 слева a будет неограниченно убывает, т.е. при $x\to 0-0$ $a\to-\infty$;

При стремлении x к 0 справа a будет неограниченно возрастать, т.е. при $x\to 0+0$ $a\to+\infty$.

То есть $x=0$ – вертикальная асимптота.

Так как функция $a(x)$ является суммой двух убывающих всюду в области определения, значит функция $a(x)$ на каждом из промежутков $(\infty;0),(0;+\infty)$ убывает.

Вычислим несколько точек для удобства и построим график на плоскости xOa. $a(-3)=1, a(-2)=-0,5, a(-1)=-3,\ a(1)=1, a(2)=-1,5, a(3)=-3.$

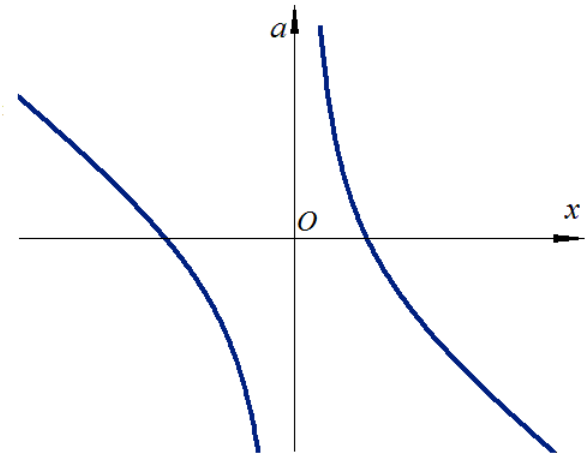


Рис. 5

Проводя прямые $a=a_0$, получаем число решений этого уравнения и видим, что один корень всегда положительный, а другой всегда отрицательный, поэтому ни при каком значении параметра a уравнение не может иметь два отрицательных корня.

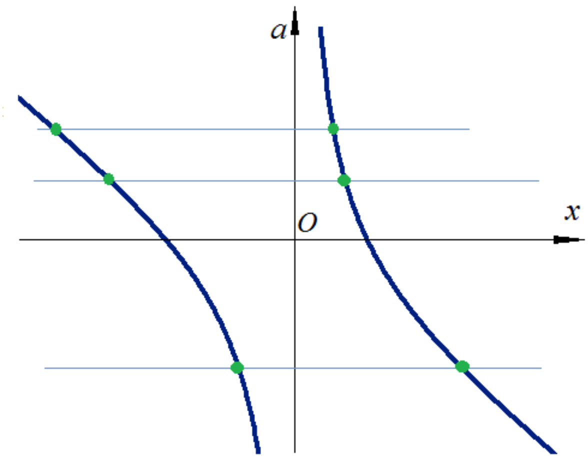


Рис. 6

Рассмотрим теперь эту задачу в другом виде.

2. При каких значениях параметра a уравнение $x^2+(a+1)x-3=0$ имеет корень, удовлетворяющий неравенству $x^2-3x+2\le 0$.

Решение. Данную задачу можно переформулировать следующим образом: выяснить при каких значениях параметрах a корень уравнения $x^2+(a+1)x-3=0$ лежит в промежутке $[1;2]$ (промежуток является решением неравенства $x^2-3x+2\le 0$).

Для решения воспользуемся графической интерпретацией "переменная-параметр".

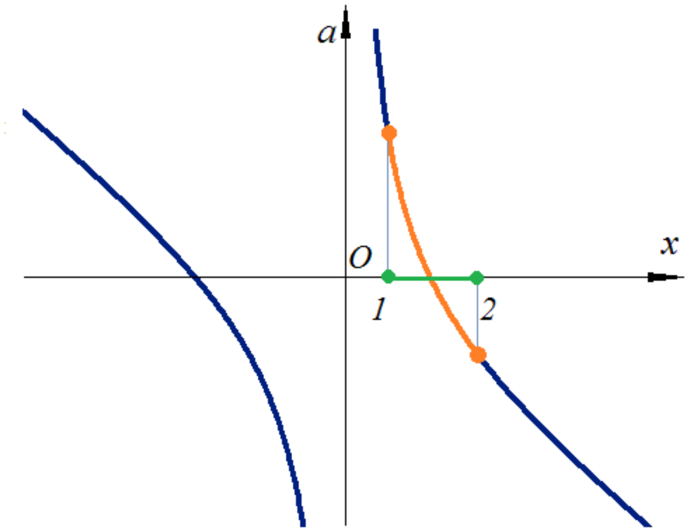


Рис. 7

Так как функция $a(x)$ убывает на промежутке $x \in [1;2]$, то то искомый параметр находится в промежутке $a \in [a_1;a_2]$, где $a_1 = a(2)$, $a_2 = a(1)$.

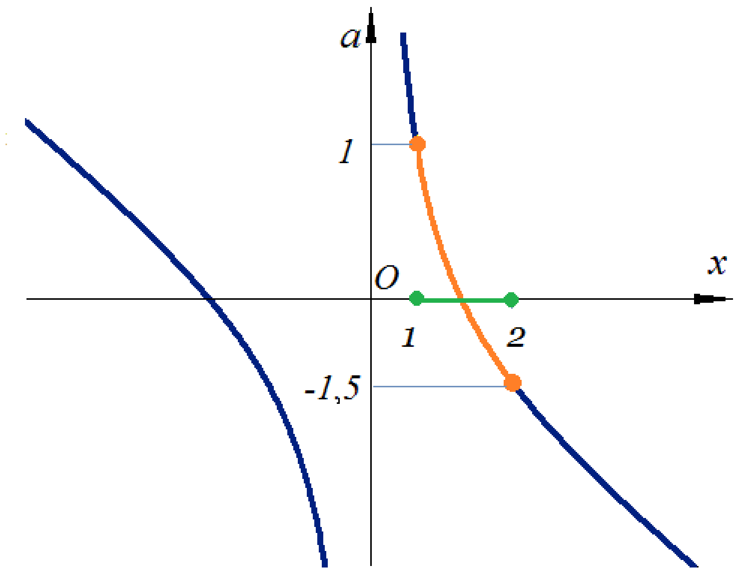


Рис. 8

$a(2) = -1,5$, $a(1) = 1$, таким образом, получаем что при $a \in [-1,5;1]$ корень уравнения $x^2 + (a+1)x - 3 = 0$ удовлетворяют неравенству $x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

3. Решить неравенство $x^2 + x + a > 0$.

Решение. Преобразуем неравенство к виду $a > -x^2 - x$ и рассмотрим функцию $a(x) = -x^2 - x = -(x+0,5)^2 + 0,25$. Графиком этой функции является парабола с вершиной в точке $(-0,5;0,25)$ и ветками вниз.

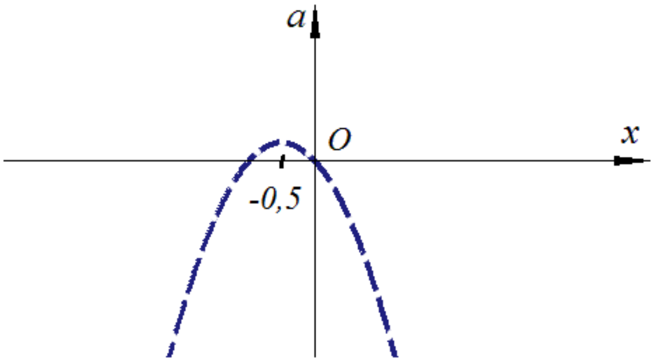


Рис. 9

Данное нам неравенство описывается надграфиком функции $a(x)$.

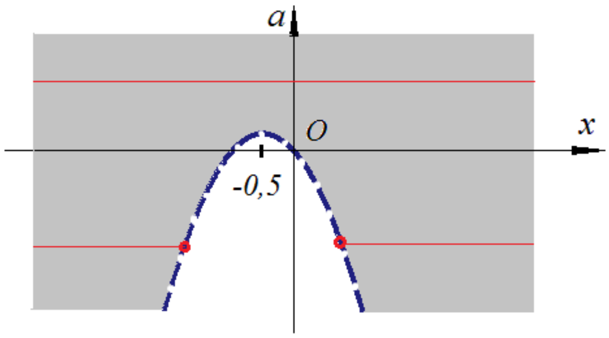


Рис. 10

При $a \leq 0,25$ получим $x \in (-\infty; -0,5-\sqrt{0,25-a}) \cup \cup (-0,5-\sqrt{0,25-a}; +\infty)$.
При $a > 0,25$ получим $x \in R$.

4. Решить неравенство $|x-a| > x+1$.

Решение. Рассмотрим случаи $x-a \geq 0$ и $x-a < 0$ и получим:

I. $\begin{cases} x-a \geq 0, \\ x-a > x+1, \end{cases}$

откуда

$\begin{cases} a \leq x, \\ a < -1, \end{cases}$

первое неравенство задает множество точек, определяемых подграфиком функции $a(x) = x$, второе – подграфиком функции $a(x) = -1$. Получим область

Рис.11

II. $\begin{cases} x-a < 0, \\ -x+a > x+1, \end{cases}$

откуда

$\begin{cases} a > x, \\ a > 2x+1, \end{cases}$

первое неравенство задает множество точек, определяемых надграфиком функции $a(x) = x$, второе–надграфиком функции $a(x) = 2x+1$. Получим область

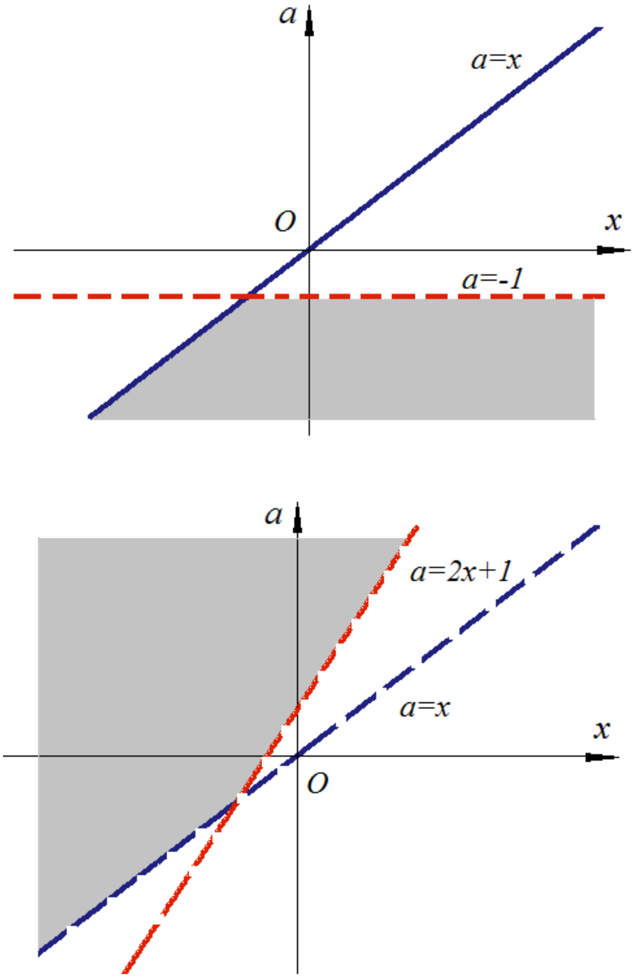


Рис. 12

В итоге получим

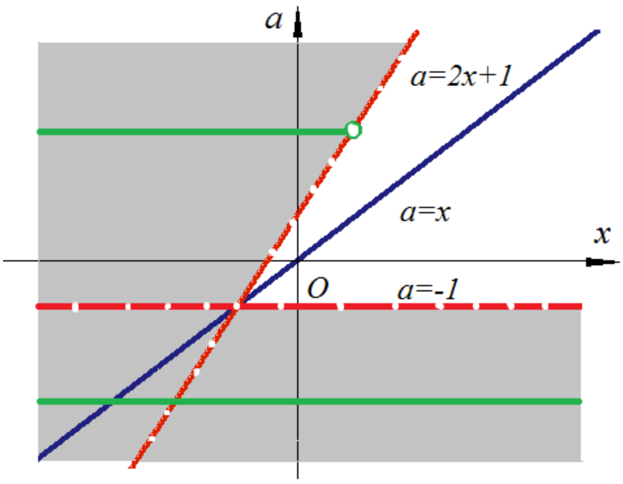


Рис. 13

и проводя, прямые a параллельные оси Ox, получаем, что при $a < -1$ решением неравенства будет любое значение x, а при $a \geq -1$ решением будет интервал $x \in \left(-\infty; \frac{a-1}{2}\right)$.

Снова получаем подтверждение ранее полученного решения.

5. Решить неравенство $\log_2 x(x-4) + \log_2 \frac{x-2}{x-4} \geq a$

Решение. Преобразуем неравенство к виду:

$$\begin{cases} x(x-4) > 0, \\ \frac{x-2}{x-4} > 0, \\ \log_2 x(x-2) \geq a. \end{cases}$$

откуда $\begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty), \\ \log_2 x(x-2) \geq a. \end{cases}$

Таким образом, нужно решить неравенство $\log_2 x(x-2) \geq a$ при условии $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

Рассмотрим функцию $a(x) = \log_2(x^2 - 2x)$. Эта функция определена на множестве $x \in (= \infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

При приближении x к 2 справа и 0 слева подлогарифмическое выражение стремится к 0, а, следовательно, значение функции $a(x)$ будет стремиться к большим отрицательным значениям.

При $x_0 = 1 \pm \sqrt{2}$ подлогарифмическое выражение будет равно 1, а, следовательно, $a(x_0) = 0$.

При очень больших значениях x (как положительных, так и отрицательных) подлогарифмическое выражение неограниченно возрастает, следовательно, возрастает и значение функции $a(x)$.

Изобразим график функции $a(x)$ на плоскости "переменная-параметр"

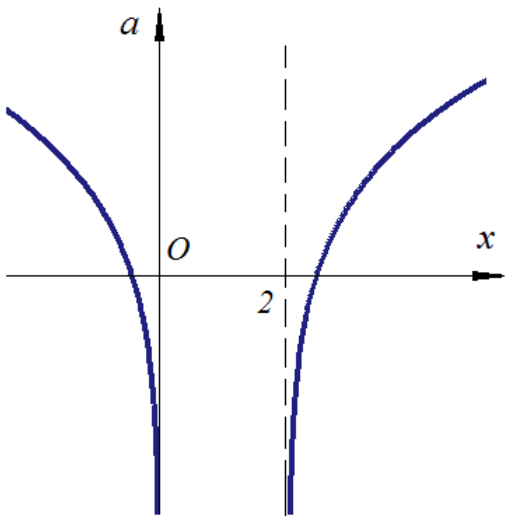


Рис. 14

С учетом ограничений $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$, получим

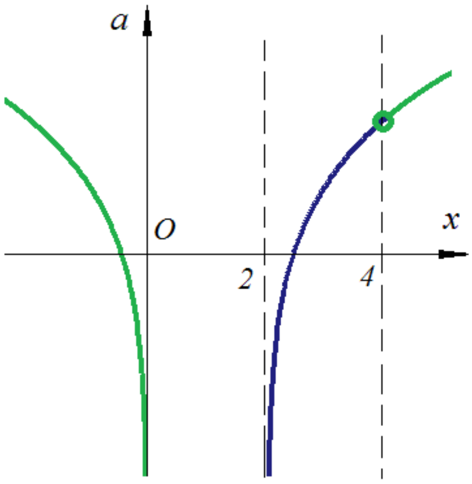


Рис. 15

Получили области и заштрихуем те из них, которые удовлетворяют неравенству $\log_2 x(x-2) \geq a$.

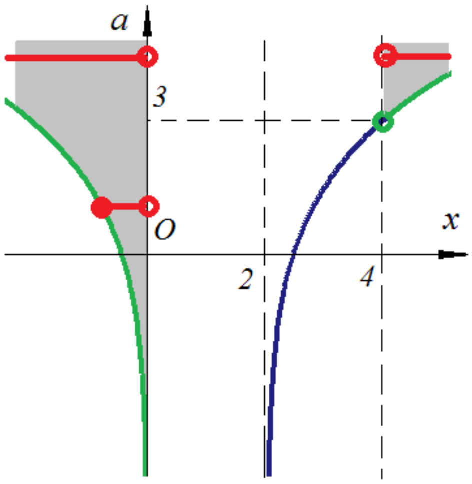


Рис. 16

Получаем при различных значениях a:

1) при $a \leq 3$ функция $a(x)$ пересекает множество в одном промежутке, т.е. $x \in [1-\sqrt{1+2^a};0)$;

2) при $a > 3$ функция $a(x)$ пересекает множество в двух промежутках, т.е. $x \in [1-\sqrt{1+2^a};0) \cup (4;1+\sqrt{1+2^a}]$.

Полученное решение подтвердило решение, полученное на прошлом занятии.

Подводя итоги семинара, становятся понятными очевидные преимущества рассматриваемого метода применительно к многим задачам.

Список литературы

[1] Александр Ларин, *http://www.alexlarin.net.*

[2] Дятлов В. Н., *Как научить решать задачи с параметрами: лекции 1-4*, Педагогический университет "Первое сентября", М., 2014, 80 с.

[3] Дятлов В. Н., *Как научить решать задачи с параметрами: лекции 5-8*, Педагогический университет "Первое сентября", М., 2014, 80 с.

[4] Российское образование, *http://www.edu.ru/tests/course/testselect.php?subject=19.*

[5] Ященко И. В., Высоцкий И. Р., Косухин О. Н., Семёнов П. В., Семенов А. В., Трепалин А. С., *Учебно-методические материалы для председателей и членов региональных предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2015 года. Математика. В трех частях*, ФИПИ, М., 2015, 72 с.

[6] Федеральный институт педагогических измерений, *http://fipi.ru/.*

[7] Ященко И. В., Шестаков С. А., Трепалин А. С., *Подготовка к ЕГЭ по математике в 2015 году. Базовый и профильный уровни. Методические указания*, МНЦМО, М., 2015, 288 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.06.2016